Statyka

Równowaga i geometria mas

równowaga sił $\sum_k \vec{F}_k = \vec{0}$

Układ odniesienia inercjalny; wszystkie siły zewnętrzne.

równowaga momentów $\sum_k \vec{M}_k = \vec{0}$

Momenty wszystkich sił i par względem jednego punktu.

moment siły $M = rF\sin\theta$

Wartość momentu dla 0 ≤ theta ≤ pi.

środek masy układu dyskretnego $x_C = \frac{\sum_k m_k x_k}{\sum_k m_k}$

Masy nieujemne, suma mas dodatnia.

granica tarcia statycznego $f \le \mu_s N$

Wartości sił nieujemne; równość dopiero na granicy poślizgu.

tarcie kinetyczne $f = \mu_k N$

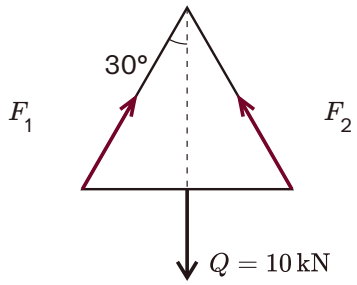
Model tarcia suchego podczas poślizgu.

Tarcie cięgien

wzór Eulera–Eytelweina $\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu\theta}$

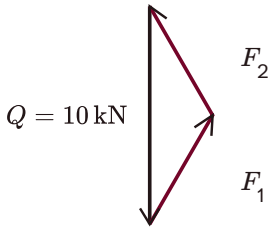
Granica poślizgu giętkiego cięgna na cylindrze: $T_2/T_1 = \exp(\mu\theta)$, gdzie $T_2 \ge T_1 > 0$, a θ jest kątem opasania w radianach. Bez poślizgu $T_2/T_1 \le \exp(\mu\theta)$.

Cięgna i obciążenie statyczne



$F_1 = F_2$; kąt liczony do pionu

Konstrukcja graficzna w skali



Zamknięty trójkąt sił

$F_1 = F_2 \approx 5{,}774\,\mathrm{kN}$

Dwa symetryczne zawiesia: trójkąt sił — legenda

konstrukcja graficzna	czynność
skala sił	np. 1 cm odpowiada 1 kN
wektor ciężaru	narysuj pionowo 10 cm w dół
kierunki cięgien	przez końce wektora poprowadź proste równoległe do cięgien
zamknięcie trójkąta	z odcinków odczytaj jednakowe siły około 5,77 kN

Dwa symetryczne zawiesia: trójkąt sił. Dwa jednakowe cięgna, obciążenie statyczne Q = 10 kN i kąt każdego cięgna do pionu 30°. Składowe poziome znoszą się; suma pionowych równoważy ciężar. Siła jednego cięgna wynosi Q/(2 cos 30°) ≈ 5,774 kN. Nie jest to dobór dopuszczalnego obciążenia zawiesia. F_1 i F_2 oznaczają siły cięgien; ich składowe wchodzą do sum sił F_x i F_y we wzorach równowagi.

Kinematyka i dynamika

Ruch punktu materialnego

prędkość chwilowa $v = \frac{dx}{dt}$

Położenie różniczkowalne względem czasu.

przyspieszenie chwilowe $a = \frac{dv}{dt}$

Prędkość różniczkowalna względem czasu.

położenie przy stałym przyspieszeniu

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{a t^2}{2}$$

Jedna oś, stałe przyspieszenie, t od chwili początkowej.

prędkość przy stałym przyspieszeniu $v = v_0 + at$

Jedna oś, stałe przyspieszenie.

związek prędkości z położeniem

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Ruch w jednej osi przy stałym przyspieszeniu.

druga zasada Newtona $F = ma$

Stała masa i układ inercjalny, zapis w jednej osi.

pęd punktu materialnego $p = mv$

Mechanika nierelatywistyczna; zapis w jednej osi.

energia kinetyczna ruchu postępowego

$$E_k = \frac{m v^2}{2}$$

Mechanika nierelatywistyczna.

praca stałej siły $W = Fs\cos\theta$

Siła stała na całym przemieszczeniu.

moc w ruchu prostoliniowym $P = Fv$

Składowa siły i prędkość w tej samej osi. P i v dotyczą tej samej chwili. Do wyznaczenia przyspieszenia z F = ma wstawiamy siłę wypadkową; z mocy napędu P/v daje tylko siłę napędu.

energia potencjalna przy powierzchni Ziemi

$$E_p = mgh$$

Stałe g; poziom odniesienia odpowiada h = 0.

twierdzenie o impulsie $J = \Delta p$

Impuls całkowitej siły zewnętrznej; układ inercjalny.

Ruch względny i biegunowy

przyspieszenie Coriolisa $\mathbf{a}_C = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{wzgl}}$

Składnik przyspieszenia bezwzględnego w obracającym się układzie; siła pozorna Coriolisa ma przeciwny znak.

prędkość w układzie biegunowym $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$

Ruch w płaszczyźnie; wersory zmieniają kierunek wraz z θ. Kropka nad symbolem oznacza pochodną po czasie.

przyspieszenie w układzie biegunowym

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta$$

Ruch płaski; kropka oznacza pochodną czasu. Baza biegunowa jest określona dla r > 0; r(t) i θ(t) są dwukrotnie różniczkowalne.

Ruch obrotowy

Bryła sztywna

prędkość kątowa $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

Kąt w radianach.

przyspieszenie kątowe $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

Stała oś obrotu.

prędkość punktu bryły $v = |\omega| r$

Wartość prędkości przy obrocie wokół stałej osi. v ≥ 0 jest wartością prędkości, a r ≥ 0 odległością od osi. Prędkość kątowa ω może mieć znak; moduł |ω| we wzorze zachowuje oba zwroty obrotu.

przyspieszenie dośrodkowe $a_n = \omega^2 r$

Punkt bryły w odległości r od osi obrotu.

równanie dynamiki obrotu $M = I\alpha$

Sztywna bryła obracająca się wokół stałej osi inercjalnej.

energia kinetyczna obrotu $E_k = \frac{I\omega^2}{2}$

Obrót względem rozpatrywanej osi.

moment pędu względem osi $L = I\omega$

Obrót bryły względem głównej osi bezwładności; zapis skalarny.

moc momentu siły $P = M\omega$

Moment i prędkość kątowa w tej samej osi.

twierdzenie Steinera $I = I_C + md^2$

Osie równoległe; jedna przechodzi przez środek masy.

moment bezwładności pełnego walca $I = \frac{mR^2}{2}$

Jednorodny pełny walec; oś symetrii.

moment bezwładności pełnej kuli $I = \frac{2mR^2}{5}$

Jednorodna pełna kula; oś przez środek.

Wytrzymałość materiałów

Rozciąganie i skręcanie

naprężenie osiowe $$\sigma = \frac{N}{A}$$

Średnie naprężenie; pręt obciążony osiowo, bez koncentracji naprężeń.

odkształcenie podłużne $$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Małe odkształcenia, l > 0.

prawo Hooke'a $$\sigma = E\varepsilon$$

Jednoosiowy stan naprężenia; zakres liniowej sprężystości.

wydłużenie pręta $$\Delta l = \frac{Nl}{EA}$$

Pręt jednorodny o stałym przekroju i stałej sile osiowej; liniowo sprężysty.

współczynnik Poissona $$\nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_l}$$

Jednoosiowe obciążenie; niezerowe odkształcenie podłużne. Małe odkształcenia w zakresie liniowo sprężystym, przy jednoosiowym obciążeniu. Odkształcenie podłużne mierzymy wzdłuż obciążenia, poprzeczne prostopadle do niego.

związek modułów sprężystości $$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Stabilny, trójwymiarowy izotropowy materiał liniowo sprężysty: E > 0, G > 0 oraz –1 < ν < 1/2.

prawo Hooke'a przy ścinaniu $$\tau = G\gamma$$

Małe odkształcenia; liniowa sprężystość. Związek G = E/[2(1 + ν)] wymaga materiału izotropowego w zakresie liniowej sprężystości.

naprężenie ścinające w nitach $$\tau = \frac{4F}{nm\pi d^2}$$

Każdy nit przenosi taką samą część siły; m = 1 w połączeniu zakładkowym, m = 2 przy dwóch nakładkach. Pomijamy tarcie między blachami i zginanie nitu, a wynik porównujemy z naprężeniem dopuszczalnym k_t.

naprężenie przy skręcaniu wału $$\tau = \frac{Tr}{J}$$

Prosty kołowy wał; sprężyste skręcanie Saint-Venanta, z dala od końców. Punkt musi leżeć w materiale przekroju: dla wału pełnego 0 ≤ r ≤ R, a dla drążonego $r_i \le r \le r_o$.

kąt skręcenia wału $$\theta = \frac{Tl}{GJ}$$

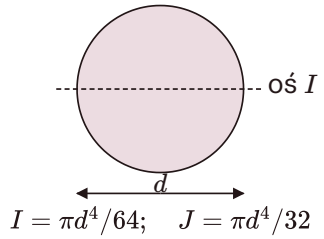
Stałe T,G,J; wał kołowy, zakres liniowej sprężystości.

moment biegunowy pełnego koła $$J = \frac{\pi d^4}{32}$$

Kołowy pełny przekrój o średnicy d.

moment biegunowy pierścienia $$J = \frac{\pi(D^4 - d_i^4)}{32}$$

Kołowy przekrój rurowy, D > d_i ≥ 0.



J: względem osi prostopadłej do przekroju, przez środek

Przekrój kołowy: I i J. d — średnica pełnego koła. I dotyczy osi w płaszczyźnie przekroju przez środek; biegunowy J — osi prostopadłej przez środek. Dla koła J = 2I; obu wartości nie stosuj zamiennie.

Belki i stateczność

Zginanie i wyboczenie

naprężenie przy zginaniu $$\sigma = -\frac{My}{I}$$

Belka Eulera–Bernoulliego; liniowa sprężystość, zginanie względem osi głównej; znaki zgodne z układem osi.

wskaźnik wytrzymałości $$W = \frac{I}{y_{max}}$$

y_{max} > 0; rozpatrywana oś zginania.

moment bezwładności prostokąta $$I = \frac{bh^3}{12}$$

Oś przez środek przekroju, równoległa do boku b.

moment bezwładności koła $$I = \frac{\pi d^4}{64}$$

Średnicowa oś w płaszczyźnie przekroju.

ugięcie wspornika z siłą na końcu $$\delta = \frac{Fl^3}{3EI}$$

Idealnie utwierdzony wspornik; stałe E,I, małe ugięcia; wartość bezwzględna. δ oznacza wartość maksymalnego ugięcia; F jest wartością obciążenia, bez znaku kierunku. Siła F działa poprzecznie do osi belki na jej swobodnym końcu; I to geometryczny moment bezwładności przekroju względem właściwej osi zginania. Model belki Eulera–Bernoulliego, bez istotnych odkształceń postaciowych.

ugięcie belki swobodnie podpartej $\delta = \dfrac{Fl^3}{48EI}$

Dwie podpory przegubowe, siła w środku rozpiętości; stałe E,I, małe ugięcia. δ oznacza wartość maksymalnego ugięcia; F jest wartością obciążenia, bez znaku kierunku.

ugięcie belki pod obciążeniem równomiernym $\delta = \dfrac{5ql^4}{384EI}$

Belka swobodnie podparta na końcach; obciążenie na całej długości, stałe E,I. δ oznacza wartość maksymalnego ugięcia; q jest wartością obciążenia, bez znaku kierunku.

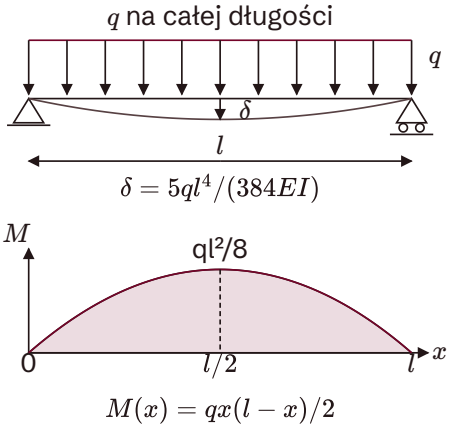
siła krytyczna Eulera $N_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{(Kl)^2}$

Smukły prosty pręt idealny; sprężyste wyboczenie; I minimalne, K zależy od podparcia.

Równania belki

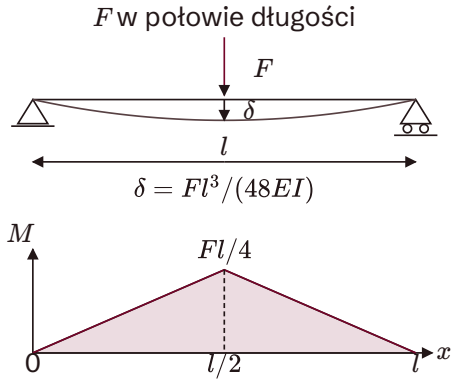
związki obciążenia, siły tnącej i momentu $\dfrac{dV}{dx} = -q(x)$ $\dfrac{dM}{dx} = V(x)$

Przyjęta konwencja: dodatnie q skierowane w dół, dodatni moment zginający sagging. Na siłach skupionych występują skoki.

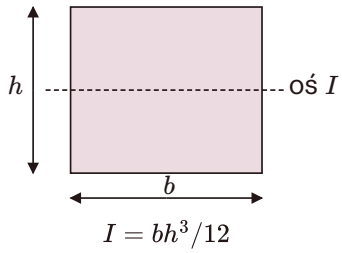


Moment zginający $M(x)$; dodatni przy rozciąganiu dołu

Belka swobodnie podparta: obciążenie q. Stałe obciążenie q [N/m] na całej długości l. E — moduł Younga, I — moment bezwładności przekroju. Maksymalne ugięcie δ i moment ql²/8 występują w środku. Małe ugięcia, stałe EI; linia ugięcia jest schematyczna.



Belka swobodnie podparta: siła F. Siła F [N] działa w środku belki długości l. E — moduł Younga, I — moment bezwładności przekroju. Maksymalne ugięcie δ i moment Fl/4 występują w środku. Małe ugięcia, stałe EI; linia ugięcia jest schematyczna.



Przekrój prostokątny i oś momentu bezwładności. I dotyczy osi poziomej przechodzącej przez środek przekroju; h mierzy się prostopadle do tej osi, b równolegle. Obrót przekroju zamienia rolę wymiarów. I podaje się w m⁴.

Drgania i przepływ

Modele podstawowe

pulsacja własna układu masa-sprężyna $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Drgania liniowe bez tłumienia, m,k > 0.

okres układu masa-sprężyna $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

Drgania liniowe bez tłumienia.

częstotliwość z okresu $$f = \frac{1}{T}$$

T > 0.

ciągłość przepływu $$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Przepływ ustalony, nieściśliwy; prędkości średnie po przekroju. Przekroje 1 i 2 leżą na tym samym przewodzie, bez bocznych dopływów i odpływów między nimi.

równanie Bernoulliego $$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = \text{const}$$

Wzdłuż linii prądu; przepływ ustalony, nieściśliwy, bez strat i pracy maszyn.

Tłumienie i przepływy lepkie

logarytmiczny dekrement tłumienia $$\delta = \ln \frac{x_k}{x_{k+1}}$$

Dodatnie amplitudy dwóch kolejnych maksimów po tej samej stronie; liniowy model słabo tłumionego ruchu swobodnego.

liczba Reynoldsa $$Re = \frac{\rho v D}{\mu}$$

Przepływ w rurze: D średnica, v wartość średniej prędkości przepływu (bez znaku kierunku); μ lepkość dynamiczna, nie kinematyczna.

prawo Hagen–Poiseuille'a $$Q = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 \mu l}$$

Ustalony, w pełni rozwinięty laminarny przepływ nieściśliwej cieczy newtonowskiej o stałej lepkości w prostej rurze kołowej; brak poślizgu na ściance.

straty Darcy'ego–Weisbacha $$\Delta p = f_D \frac{l}{D} \frac{\rho v^2}{2}$$

f_D to współczynnik Darcy'ego, czterokrotnie większy od Fanninga; odcinek przewodu, straty miejscowe osobno. Przepływ ustalony i w pełni rozwinięty, nieściśliwa ciecz, prosty przewód o stałym przekroju. D oznacza średnicę wewnętrzną rury; w zastosowaniu do przekroju niekołowego używa się średnicy hydraulicznej i właściwego współczynnika oporów.

moc pobierana przez pompę $$P = \frac{\Delta p Q}{\eta}$$

Praca pompowa ze wzrostem ciśnienia; P to moc pobierana, Δp i Q są wartościami nieujemnymi. η jest sprawnością całkowitą, $0<\eta\leq 1$; Δp w Pa i Q w m^3/s dają P w W. Przepływ ustalony cieczy nieściśliwej; różnice wysokości i prędkości między przekrojami pomiarowymi na wlocie i wylocie są pomijalne. Δp oznacza wzrost ciśnienia statycznego między tymi przekrojami.

Technologia i przekładnie

Obróbka i pasowania

przełożenie prostej przekładni zębatej $$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}$$

Wartość przełożenia jednej pary kół; przy zazębieniu zewnętrznym koła obracają się przeciwnie. z_1 i z_2 to liczby zębów: dodatnie liczby całkowite.

średnica podziałowa koła zębatego $$d = mz$$

Koło walcowe o zębach prostych; m moduł. Dla zębów skośnych rozróżnij moduł normalny i czołowy.

prędkość skrawania $$v_c = \frac{\pi d n}{1000}$$

d w mm, n w obr./min, v_c w m/min; d właściwa średnica obróbki lub narzędzia.

posuw minutowy frezowania $$v_f = f_z z n$$

f_z w mm/ząb, z liczba zębów narzędzia, n w obr./min; wynik mm/min.

czas podstawowy przejścia narzędzia $$t = \frac{L}{v_f}$$

L całkowita droga robocza wraz z wymaganym dojściem i wyjściem; spójne jednostki. Nie obejmuje czasu pomocniczego.

tolerancja wymiaru $$T = D_{\max} - D_{\min}$$

$$D_{\min} = N + EI \qquad D_{\max} = N + ES$$

Wymiary graniczne w tej samej jednostce; T ≥ 0. We wzorach wszystkie długości mają tę samą jednostkę. W kalkulatorze N podaj w mm, a odchyłki ze znakiem w µm. EI ≤ ES, wymiary graniczne dodatnie. Otwór ma oznaczenia EI, ES, wałek ei, es; rachunek jest taki sam.

granice luzu pasowania $$L_{\min} = D_{\min} - d_{\max}$$

$$L_{\max} = D_{\max} - d_{\min}$$

D oznacza otwór, d wałek; wartości ujemne oznaczają wcisk. Nie zamieniaj dolnej i górnej granicy.

Siłowniki i pole czynne

Siła i pole czynne

siła idealnego siłownika $$F = \Delta p A$$

Model idealny bez tarcia. Użyj dodatniej różnicy ciśnień względem ciśnienia po stronie przeciwnej i właściwego pola czynnego. Dla różnych pól i niezerowego przeciwciśnienia oblicz osobno obie siły ciśnienia.

pole tłoka przy wysuwie $$A = \frac{\pi D^2}{4}$$

Pełny, kołowy przekrój tłoka. Średnicę w milimetrach zamień na metry, aby otrzymać pole w metrach kwadratowych.

pole czynne siłownika przy powrocie $$A = \frac{\pi \cdot (D^2 - d^2)}{4}$$

Średnica tłoczyska jest mniejsza od średnicy tłoka. Pole czynne jest pomniejszone o przekrój tłoczyska.

Siłownik: wysuw i powrót

ruch	pole czynne	siła idealna
wysuw	πD² / 4 = około 1257 mm²	około 754 N
powrót	π(D² − d²) / 4 = około 942 mm²	około 565 N

Siłownik: wysuw i powrót. Średnica tłoka D = 40 mm, tłoczyska d = 20 mm; różnica ciśnień Δp = 6 bar = 600 000 Pa. Ciśnienie po stronie przeciwnej równe ciśnieniu odniesienia. Tarcie pomijamy. Siła powrotu jest mniejsza, ponieważ pole czynne jest mniejsze.

Rurociągi i proste złącza

Odcinek rurociągu

długość osiowa rury z łukiem prostym $$L = a + b + \frac{\pi r}{2}$$

Dwa odcinki proste i łuk 90°. Długości odcinków prostych nie obejmują łuku; promień mierzony do osi rury.

masa odcinka rury $$m = \rho \frac{\pi \cdot (D^2 - d^2)}{4} L$$

Jednorodny materiał i stały przekrój pierścieniowy; średnica zewnętrzna większa od wewnętrznej. Bez masy łączników, spoin i medium. Dla łuku idealnego stały przekrój nie ulega deformacji.

Złącze doczołowe

naprężenie w prostym złączu doczołowym $$\sigma = \frac{F}{tl}$$

Proste złącze doczołowe z pełnym przetopem, osiowe rozciąganie prostopadle do przekroju t razy l; równomierny rozkład naprężeń. Pomijamy mimośród, zginanie, karby i wady. Wynik nie stanowi oceny nośności według norm.

Równoważnik węgla

równoważnik węgla IIW $$C_E = C_C + \frac{C_{Mn}}{6} + \frac{C_{Cr} + C_{Mo} + C_V}{5} + \frac{C_{Ni} + C_{Cu}}{15}$$

Wariant IIW dla stali. Wszystkie zawartości podaj jako liczby procentowe, np. 0,20 dla 0,20% masowych; nie jako ułamki 0,002. Sam równoważnik nie rozstrzyga spawalności i nie wyznacza temperatury podgrzewania.

Rura: wymiary osiowe i masa

przykład	dane	wynik
łuk 90°	a = 1 m, b = 2 m, r = 0,1 m	L ≈ 3,157 m
masa prostej rury	D = 60 mm, d = 50 mm, L = 2 m, ρ = 7850 kg/m³	m ≈ 13,564 kg

Rura: wymiary osiowe i masa. Dla łuku 90° długość osiowa to suma prostych i ćwiartki okręgu. Masę licz z pola materiału, nie z pola pełnego koła. Średnice w milimetrach zamień na metry. Tolerancje wymiarów sprawdź oddzielnie.

Złącze doczołowe: najpierw pole czynne

etap	działanie	wynik
pole czynne	5 mm · 100 mm	500 mm²
naprężenie	10 000 N / 500 mm²	20 N/mm² = 20 MPa

Złącze doczołowe: najpierw pole czynne. Model dydaktyczny: złącze doczołowe z pełnym przetopem, efektywna grubość 5 mm, efektywna długość 100 mm, siła osiowa 10 kN. Nie jest to model spoiny pachwinowej ani złącza obciążonego mimośrodowo.

IIW: udziały składników równoważnika węgla

składnik	wkład	wartość
węgiel	C	0,20
mangan	Mn / 6	0,20
chrom, molibden, wanad	(Cr + Mo + V) / 5	0,02
nikiel i miedź	(Ni + Cu) / 15	0,00
suma IIW	CE	0,42%

IIW: udziały składników równoważnika węgla. Zawartości procentowe masowe: C 0,20; Mn 1,20; Cr 0,10; pozostałe składniki we wzorze równe zero. Obliczony równoważnik wynosi 0,42%. To jeden nazwany wariant; nie dopisujemy składnika krzemu z innej definicji.